

ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement  
Supérieur, de la Formation des Cadres  
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2007  
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique  
ENSEM

Concours National Commun  
d'Admission aux  
Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées  
Session 2007

ÉPREUVE DE PHYSIQUE II

Durée 4 heures

Concours **MP**

Cette épreuve comporte 7 pages au format A4 en plus de cette page de garde  
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

## Fibres optiques

Les fibres optiques sont des guides d'ondes électromagnétiques dans le domaine optique. L'épreuve propose d'abord quelques aspects de la physique des fibres optiques. Elle est composée de trois parties largement indépendantes entre elles. Une fibre optique à saut d'indice est constituée d'un cœur cylindrique de rayon  $a$  et d'axe Oz entouré d'une gaine également cylindrique et de rayon  $b > a$  (figure 1). Le cœur est composé d'un milieu diélectrique non magnétique, transparent, linéaire isotrope et homogène d'indice de réfraction  $n_1$ . La gaine est elle aussi composée d'un milieu diélectrique non magnétique, transparent, linéaire isotrope et homogène d'indice de réfraction  $n_2$ . Dans la pratique  $n_2 < n_1$ .

Dans tout le problème, la fibre optique est supposée plongée dans l'air d'indice de réfraction  $n_0 = 1$ . La longueur d'onde dans le vide du rayonnement utilisé sera notée  $\lambda_0$ .

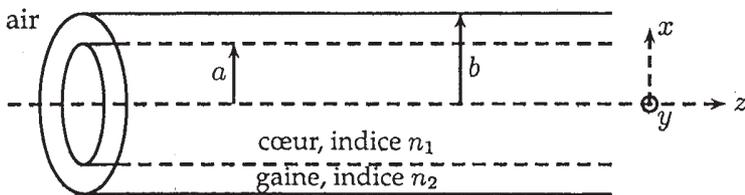


Fig 1 : Fibre optique à saut d'indice.

Pour simplifier les calculs tout en s'assurant de pouvoir dégager l'essentiel des propriétés des fibres optiques, on limite l'étude, à la propagation du signal lumineux, selon la direction moyenne Oz dans un ensemble de milieux dont l'indice ne dépend que de la coordonnée  $z$  (figure 2).

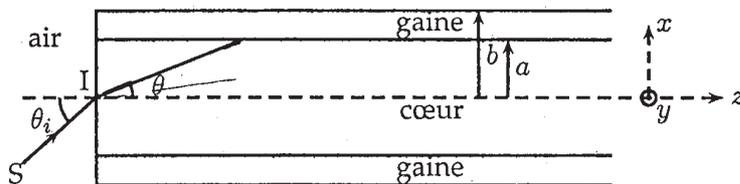


Fig 2 : Modèle simplifié d'une fibre optique à saut d'indice.

Au besoin, on notera  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  et  $\vec{u}_z$  les trois vecteurs unitaires du repère orthonormé  $(O, x, y, z)$ . Pour la célérité de la lumière dans le vide, on prendra la valeur approchée habituelle  $c_0 = 3,0 \cdot 10^8 m.s^{-1}$ .

### 1<sup>ère</sup> partie :

#### Étude géométrique d'une fibre optique à saut d'indice

1.1 On se place dans le cadre de l'approximation de l'optique géométrique.

1.1.1 En quoi consiste une telle approximation ?

1.1.2 L'approximation de l'optique géométrique est-elle valable pour décrire la propagation d'une onde lumineuse dans le cœur d'une fibre optique en silice d'indice de réfraction  $n_1 = 1,46$  et de rayon  $a = 100 \mu m$ . On donne la longueur d'onde dans le vide du rayonnement  $\lambda_0 = 1,55 \mu m$ . À quel domaine du spectre électromagnétique appartient ce rayonnement ?

1.2 On considère un rayon lumineux  $SI$  se propageant dans l'air et situé dans un plan  $zOx$  (figure 2).

1.2.1 Rappeler les lois de DESCARTES-SNELL pour la réfraction. Qu'appelle-t-on réflexion totale ? Quand existe-t-elle ? Définir l'angle de réflexion totale  $\Lambda$  et donner son expression en fonction de  $n_1$  et  $n_2$ .

1.2.2 Montrer que si l'angle  $\theta_i$  est inférieur à une certaine valeur  $\theta_a$  que l'on déterminera, alors ce rayon peut être guidé dans le coeur de la fibre.

1.2.3 Déterminer la valeur numérique de  $\theta_a$  pour  $n_1 = 1,46$  et  $n_2 = 1,41$ .

1.2.4 Déterminer l'expression de l'ouverture numérique  $ON = \sin \theta_a$  en fonction de  $n_1$  et  $\Delta = \frac{n_1^2 - n_2^2}{2n_1^2}$

1.2.5 Montrer que, pour un rayon lumineux guidé par la fibre optique,  $|\theta| \leq \theta_{lim}$  et exprimer  $\sin \theta_{lim}$  en fonction de  $\Delta$ .

1.3 Un signal lumineux est émis au point  $I$  à l'instant  $t = 0$  dans une direction faisant un angle  $\theta$  avec l'axe  $Oz$  à l'intérieur de la fibre optique (figure 2). On note  $\tau(\theta, z)$  le temps mis par le signal pour être détecté par un photorécepteur placé dans le plan d'abscisse  $z$ .

1.3.1 Représenter soigneusement le trajet d'un tel rayon lumineux au sein de la fibre optique.

1.3.2 Exprimer la longueur totale  $\ell$  du trajet parcouru par la lumière au sein de la fibre optique entre le plan d'entrée et le plan d'abscisse  $z$  en fonction de  $z$  et  $\theta$ .

1.3.3 En déduire l'expression de  $\tau(\theta, z)$  en fonction de  $n_1, z, \theta$  et  $c_0$ .

Lorsque  $\theta$  prend les valeurs comprises entre 0 et  $\pm\theta_{lim}$ ,  $\tau$  prend les valeurs entre  $\tau_0$  et  $\tau_0 + \Delta\tau$ .

1.3.4 Exprimer  $\Delta\tau$  en fonction de  $z, \theta_{lim}, n_1$  et  $c_0$ .

1.4 La source émet une succession d'impulsions lumineuses de période  $T$  et de durées très brèves devant  $T$  (figure 3). On note  $I'(z, t)$  l'intensité lumineuse détectée en régime établi par le photorécepteur placé à l'abscisse  $z$ .

1.4.1 Représenter qualitativement  $I'(z, t)$  et commenter le résultat dans les deux cas suivants :

- $z = z_1$  telle que  $\Delta\tau(z_1) < T$  ;
- $z = z_2$  telle que  $\Delta\tau(z_2) > T$  ;

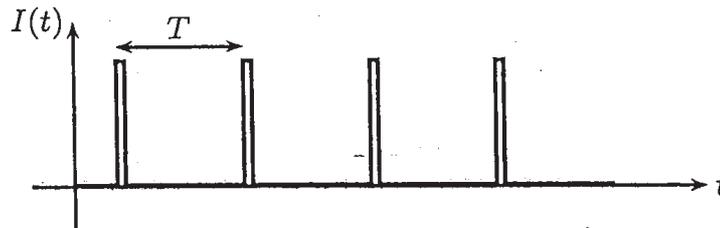


Fig 3 : Suite d'impulsions lumineuses.

1.4.2 Déterminer l'expression de la valeur minimale  $T_m$  de  $T$  au-dessous de laquelle les impulsions détectées par le photorécepteur peuvent se chevaucher. On exprimera  $T_m$  en fonction de  $c_0, n_1, n_2$  et  $z$ . Conclure quant à la transmission de signaux à grande distance.

1.4.3 Calculer  $T_m$  ainsi que l'ordre de grandeur du débit maximal de la fibre optique exprimé en nombre d'impulsions par seconde lorsque  $z = 1 \text{ km}$ ,  $n_1 = 1,46$  et  $n_2 = 1,41$ . Commenter.

2<sup>ème</sup> partie :  
Modes d'une fibre optique

La condition de guidage de la lumière par la fibre optique, établie en 1.2.2 est en faite une condition nécessaire mais non suffisante. En effet, la description utilisée ne tient pas compte *suffisamment* du caractère ondulatoire de la lumière.

Un modèle simple permet d'introduire la notion de mode de propagation dans une fibre optique. Selon ce modèle, on décrit la propagation de la lumière au sein de la fibre optique à l'aide d'une onde électromagnétique plane monochromatique. La figure 4 représente une portion de la fibre optique.  $(\Pi)$  est le plan d'onde correspondant aux rayons lumineux  $A_1B_1, A_2B_2, \dots$ . Pour qu'il y ait propagation le long de la fibre optique, il faut que les ondes issues des réflexions multiples soient en phase aux différents points  $P_1, P_2, \dots$  pour y interférer de manière identique.

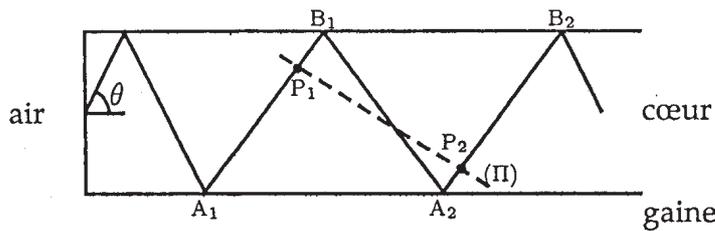


Fig 4 : Onde lumineuse au sein d'un fibre optique.

**2.1** Énoncer le théorème de MALUS-DUPIN.

Un calcul géométrique non demandé dans ce problème, montre que la longueur du trajet, le long du rayon lumineux, séparant deux points successifs  $P_i$  et  $P_{i+1}$  est donné par :

$$P_i P_{i+1} = 4a \sin \theta \quad (1)$$

**2.2** Exprimer le déphasage  $\Delta\varphi$  entre les amplitudes des ondes aux points  $P_i$  et  $P_{i+1}$  en fonction de  $a, \theta, n_1$  et  $\lambda_0$ .

**2.3** En explicitant la condition d'interférence constructive, montrer que seules certaines inclinaisons correspondant à des valeurs particulières  $\theta_m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) de l'angle  $\theta$  sont permises. Chacune de ces valeurs correspond à un mode de propagation. Le mode fondamental correspond à  $m = 0$ .

**2.4** À quelle condition sur  $a$  le mode d'ordre  $m$  existe-t-il ?

**2.5** En déduire le nombre  $N$  de modes possibles en fonction de  $n_1, n_2, a$  et  $\lambda_0$ . Faire l'application numérique pour  $a = 100 \mu m, n_1 = 1,46, n_2 = 1,41$  et  $\lambda_0 = 1,55 \mu m$

**2.6** Est-il possible dans la pratique de distinguer le mode  $+m$  du mode  $-m$  ?

Une fibre optique monomode est une fibre dans laquelle seul le mode fondamental peut se propager.

**2.7** À quelle condition sur son rayon  $a$ , une fibre optique est-elle monomode ? On exprimera le rayon maximum  $a_{max}$  d'une telle fibre en fonction de  $\lambda_0, n_1$  et  $n_2$ .

**2.8** Calculer la valeur numérique de  $a_{max}$  pour  $\lambda_0 = 1,55 \mu m, n_1 = 1,46$  et  $n_2 = 1,41$ .

**2.9** Quel intérêt peut-il y avoir à utiliser une fibre optique monomode compte tenu de l'étude effectuée en 1.3 et 1.4 ?

3<sup>ème</sup> partie :  
Gyromètre optique

Cette partie aborde l'étude du principe de fonctionnement d'un gyromètre optique. Comme son prédécesseur mécanique ou gyroscope, le gyromètre optique est capable de détecter de faibles rotations. Il trouve ainsi son utilisation dans la navigation inertielle.

### 3.1 Effet Sagnac

La figure 5 représente un interféromètre de SAGNAC éclairé par une source Laser. La lumière de la source est divisée à l'aide de la séparatrice  $S_p$  en deux ondes se propageant en sens opposés le long du chemin fermé défini par les miroirs  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$ .

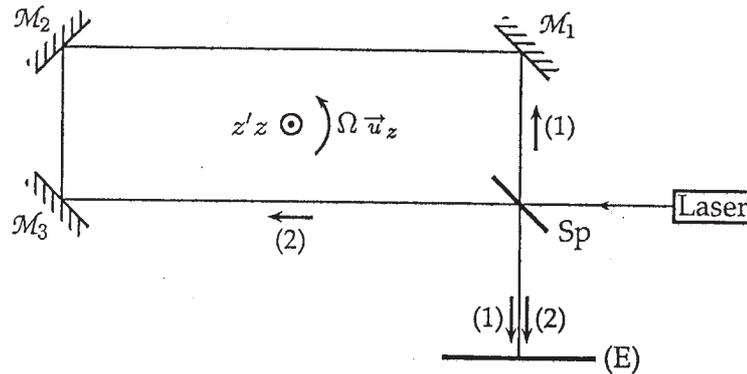


Fig 5 : Interféromètre de SAGNAC.

Les ondes contrapropagatives (1) et (2) produisent une figure d'interférence sur l'écran (E).

Lorsque l'interféromètre, la source et l'écran sont animés d'un mouvement d'ensemble de rotation de vitesse angulaire  $\vec{\Omega} = \Omega \vec{u}_z$  par rapport à un référentiel galiléen, les chemins optiques dans les sens (1) et (2) ne sont pas égaux. Il en résulte un déphasage entre les ondes (1) et (2) dépendant de  $\Omega$  : c'est l'effet SAGNAC. Cet effet, qui se traduit sur l'écran par un déplacement des franges d'interférences, peut être exploité pour mesurer la vitesse de rotation de l'ensemble. Pour simplifier l'étude, on suppose que le trajet des rayons lumineux est un cercle de rayon  $R$  et non le rectangle représenté figure 5.

L'interféromètre est placé dans l'air supposé avoir les mêmes propriétés électromagnétiques que le vide.

- 3.1.1 Exprimer la durée  $\delta t_0$  que mettent les ondes (1) et (2) pour faire un tour lorsque l'interféromètre est au repos par rapport au référentiel galiléen.
- 3.1.2 Montrer que lorsque l'ensemble est en rotation, le trajet de l'onde (1) constituant un tour de séparatrice à séparatrice diffère d'une quantité  $\Delta \ell$  de celui de l'onde (2).
- 3.1.3 Montrer que les durées de propagation  $\delta t_1$  et  $\delta t_2$  respectivement des trajets de l'onde (1) et de l'onde (2) vérifient des relations de la forme :

$$\delta t_i = \delta t_0 \pm \frac{R\Omega}{c_0} \delta t_i \quad (2)$$

En déduire les expressions de  $\delta t_1$  et  $\delta t_2$ .

**3.1.4** En déduire que, dans le cas où la vitesse de déplacement  $R\Omega$  de la séparatrice est faible devant la célérité de la lumière dans le vide  $c_0$ , la différence de phase  $\Delta\varphi$  entre les ondes qui interfèrent peut s'écrire :

$$\Delta\varphi = \frac{8\pi S\Omega}{\lambda_0 c_0} \quad (3)$$

$\lambda_0$  étant la longueur dans le vide de l'onde lumineuse et  $S$  la surface de l'interféromètre supposé circulaire.

**3.1.5** Calculer la différence de phase pour  $R = 0,1 \text{ m}$ ,  $\lambda_0 = 0,8 \mu\text{m}$  et les trois vitesses angulaires suivantes :  $\Omega = 10^{-8} \text{ s}^{-1}$ ,  $\Omega = 10^{-1} \text{ s}^{-1}$  et  $\Omega = 10^2 \text{ s}^{-1}$ . Commenter.

**On supposera dans toute la suite du problème** que l'expression (3) du déphasage en fonction de la vitesse de rotation ne dépend pas de l'indice du milieu.

### 3.2 Gyromètre à fibre optique

$N$  tours de fibre optique sont enroulés autour d'un tambour circulaire d'axe  $z'Oz$  et de rayon  $R$ . Les deux extrémités  $A$  et  $B$  de la fibre sont placés aux foyers de deux lentilles convergentes  $L_A$  et  $L_B$ . Un faisceau Laser de fréquence  $\nu$  est envoyé sous une incidence de  $\pi/4$  sur la lame séparatrice  $S_p$  donnant lieu à deux ondes contrapropagatives (1) et (2) dans la fibre (figure 6).

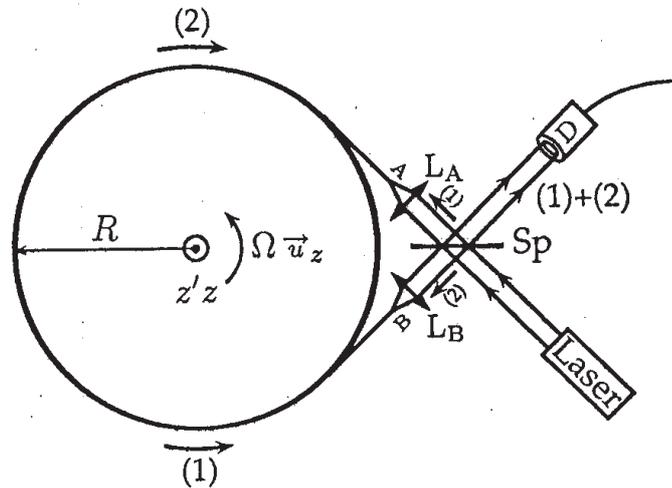


Fig 6 : Schéma de principe d'un gyromètre à fibre optique.

Le photorécepteur analyse la figure d'interférence produite par les ondes (1) et (2) et fournit un signal électrique  $s(t)$  proportionnel à l'intensité lumineuse  $I(t)$  qu'il reçoit :  $s(t) = \alpha I(t)$  où  $\alpha$  est une constante positive. On négligera l'écart entre les points  $A$  et  $B$  et le tambour. L'ensemble est animé d'un mouvement de rotation de vitesse angulaire  $\Omega$  par rapport à un référentiel galiléen.

#### 3.2.1 principe

**3.2.1.1** À partir des résultats établis à la question 3.1.4, déterminer l'expression du déphasage  $\Delta\varphi$  entre les ondes (1) et (2) au niveau du photorécepteur en fonction de  $\Omega$ ,  $N$ ,  $\lambda_0$ ,  $c_0$  et de l'aire  $S = \pi R^2$  de la base du tambour.

**3.2.1.2** Déterminer l'expression du signal  $s(t)$  émis par le photorécepteur.

**3.2.1.3** Montrer que l'introduction d'un déphasage supplémentaire constant de  $\pi/2$  entre les deux ondes permet d'obtenir une réponse linéaire du système aux faibles vitesses de rotation.

#### 3.2.2 sensibilité aux effets extérieurs

**3.2.2.1** Discuter qualitativement l'influence de chacun des phénomènes suivants sur le fonctionnement de l'interféromètre. Proposer, le cas échéant, lorsque l'effet est perturbateur, une démarche permettant de réduire son influence :

- a) La silice constituant le coeur de la fibre se dilate thermiquement. La variation relative de longueur de la fibre est  $1 \cdot 10^{-7} K^{-1}$ .
- b) Les vibrations mécaniques du gyromètre peuvent faire varier la distance des points A et/ou B à la séparatrice.
- c) Les variations de température, les champs électromagnétiques extérieurs peuvent influencer sur les propriétés optiques et mécaniques de la lame séparatrice.
- d) Les extrémités des fibres donnent lieu à des réflexions parasites.

**3.2.2.2** Quels peuvent être les avantages et les inconvénients d'une grande longueur de fibre ?

**3.2.2.3** Calculer le déphasage  $\Delta\varphi$  pour  $R = 0,1 \text{ m}$ ,  $N = 1 \cdot 10^4$ ,  $\nu = 3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$  et les trois vitesses angulaires suivantes :  $\Omega = 10^{-8} s^{-1}$ ,  $\Omega = 10^{-1} s^{-1}$  et  $\Omega = 10^2 s^{-1}$ . Commenter.

**fin de l'énoncé**